分类号：0156.1　　　　单位代码：10636
密　级：公　开　　　　学　　号：GX20100801004

四川師範大學

硕士学位论文

中文论文题目：一些数论函数的性质研究

英文论文题目：The study of the nature of the functio of number theory

论文作者：吴　莉
指导教师：王学平
专业名称：基础数学
研究方向：基础数论
所在学院：四川师范大学数学与软件科学学院

论文提交日期：2013年4月10日
论文答辩日期：2013年5月18日

四川师范大学学位论文独创性声明

本人声明：所呈交学位论文　一些数论函数的性质研究　，是本人在导师　王学平 教授　指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

本人承诺：已提交的学位论文电子版与论文纸本的内容一致。如因不符而引起的学术声誉上的损失由本人自负。

学位论文作者：吴莉　　　　签字日期：2013 年 5 月 10 日

一些数论函数的性质研究

基础数学专业

研究生:吴莉 **指导教师:王学平** (教授)

摘要 本文利用初等数论、组合数学等方法, 对一些数论函数性质进行了研究. (1)研究无平方因子的性质, 进一步获得了第 n个无平方因子数的一个上界估计. (2) 利用等幂和的Bernoulli 展开式, 得到了关于 $\sigma(k)$ 的和式 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma(k^r)$ 上界的估计. (3)研究张文鹏教授提出的一个包含Smarandache LCM的函数的猜想, 并给出了一些新的结论. (4)利用Pell方程的基本解的性质, 对于方程$x^2-Dy^2=\pm 2$的通解进行了讨论, 获得了该方程解的一个三阶递推性质, 证明了Tekcan在2004年在Irish Math. Soc. Bulletin上提出的一个猜想. (5)推广了由Bencze提出的两个公开问题的结论, 证明了对于任意给定的正整数k和非零整数b, 均存在无穷多个正整数n, 使得以下三个不等式同时成立: $\sigma(n)-\sigma(n+b) > kn, \sigma(n) > k\sigma(n+1), \sigma(n) > k\sigma(n-1)$.

关键词: 无平方因子数, 上界, 约数和函数, Smarandache LCM 函数, Pell方程

Research on the properties of some number theory functions

Basic Mathematics

Student:Wu li **Supervisor:Wang xue ping**

Abstract In this thesis, several nature of number theory function is studied based on the Combinatorial mathematics theory and Elementary number theory. (1) The nature of square-free number is studied; furthermore, an upper bound estimation of the first n square-free number is obtained. (2) An upper bound estimation of sum formula $\sum_{k=1}^{n} \sigma(k^r)$ about sequence of $\sigma(k)$ is obtained by using the sum of equal powers of the Bernoulli expansion. (3) A conjecture involving the Smarandache LCM function which is proposed by Zhang Wenpeng is studied and some results for this conjecture are given. (4) The solutions of the equation $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ are discussed, and a third-order recursive property of the solutions of this equation is obtained by using the nature of fundamental solution of Pell′ s equation; furthermore, a conjecture proposed by Tekcan A. in Irish Math. Soc. Bulletin in 2004 is proved. (5) We extend the conclusions of two open problems proposed by Bencze and prove that, for any given positive integers k and non-zero integers b, there exists infinitely many positive integers n such that the following three inequalities hold simultaneously: $\sigma(n) - \sigma(n+b) > kn$,$\sigma(n) > k\sigma(n+1)$and $\sigma(n) > k\sigma(n-1)$,.

Keywords: 2-power free number; uper bound estimate, sum of divisors, Smarandache LCM function, Pell equation

目 录

摘要 i

ABSTRACT ii

1 引言 1

2 无平方因子数的上界估计 3

2.1 问题的提出 3

2.2 无平方因子数的估计 3

2.3 一个注记与问题 4

3 一类约数和函数的上界估计 5

3.1 三个引理 5

3.2 约数和函数$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k^r)$的上界 6

3.3 两个推论 6

4 一个关于Smarandache LCM函数的猜想 9

4.1 关于Smarandache LCM函数的猜想 9

4.2 定理4.1.1的证明 10

4.3 定理4.2.2的证明 10

5 Pell方程$x^2 - Dy^2 = \pm 2$的解的递推性质 12

5.1 Tekcan的一个递推关系 12

5.2 猜想的推广及证明 13

5.3 一些待解决的问题 15

6 与约数和函数$\delta(n)$有关的一些不等式的解 16

6.1 Bencze的两个公开问题 16

6.2 不等式$\sigma(n) - \sigma(n+b) > kn$的条件 17

6.3 不等式组$\sigma(n) > k\sigma(n+1), \sigma(n) > k\sigma(n-1)$的解 18

6.4 进一步的问题 19

参考文献 19
致 谢. 24
在校期间的科研成果. 25

1 引言

数论函数亦称算术函数. 这是一类重要的函数. 指定在正整数集上的实值或复值函数. 更一般地, 也可把数论函数看作是在某一整数集上定义的函数. 以正整数为定义域的函数$f(n)$, 例如数列$\{a_n\}$、阶乘$n!$、幂n^λ等都是数论函数.

在数论上, 算术函数(或称数论函数)指定义域为正整数、陪域为复数的函数, 每个算术函数都可视为复数的序列. 最重要的算术函数是积性及加性函数. 算术函数的最重要操作为Dirichlet卷积, 对于算术函数集, 以它为乘法, 一般函数加法为加法, 可以得到一个阿贝尔环.

重要的数论函数, 例如: 设n的标准分解式为$n = p_1^{l_1} \cdots p_s^{l_s}$

①Mobius函数, $\mu(n) = \begin{cases} 1,\ (n=1); \\ (-1)^s,\ (l_1 = l_2 = \cdots = l_s = 1); \\ 0,\ (\text{有某个}l_j > 1, 1 \le j \le s). \end{cases}$ 易知,

$\sum\limits_{d|n} = \triangle n = \begin{cases} 1,\ (n=1); \\ 0,\ (n>1). \end{cases}$ 式中和号表示 d 过 n 的所有因数.

② Euler 函数$\varphi(n)$ 表示与 n 互素且不超过 n 的正整数的个数, 易证$\varphi(mn) = \frac{d\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(d)}$ 这里$(m,n) = d$. 1801年, Gauss C F. 证明了$\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$. 关于Euler 函数, 有一个迄今尚未解决的猜想: 不存在复合函数 n 使得 $\varphi(n)|n-1$, 这个猜想是1932年由 Leimer D H. 提出来的. 1962年, 柯召和孙琦证明了这样的复合数存在, n 至少是12个不同的奇素数的乘积; 1980年, Cohen G L.和 Ha Jiesi P. 用计算机改进到 n 至少是14个不同的奇素数的积.

③除数函数, $\sigma_u(n) = \sum\limits_{d|n} d^u$

当$u=0$时,$\sigma_0(n) = d(n) = (l_1+1)\cdots(l_s+1)$

设 $\sigma_1(n) = \sigma(n)$, 正整数 n 满足$\sigma(n) = 2n$时, n 就叫做完全数.

④曼格尔德特函数

$\wedge n = \begin{cases} \log p,\ (\text{若}n\text{为素数}p\text{的方幂}); \\ 0,\ (\text{其他情况}). \end{cases}$ 则有$\sum\limits_{d|n} \wedge(d) = \log n$和$\wedge(n)\log n + \sum\limits_{d|n} \wedge(d) \wedge (\frac{n}{d}) = \sum\limits_{d|n} \mu(d) \log^2 \frac{n}{d}$, 后一恒等式在素数分布理论中有用.

Dirichlet 卷积, 设$f_1(n)$和$f_2(n)$是两个数论函数, 则$f(n) = \sum\limits_{d|n} f_1(d) f_2(\frac{n}{d})$叫做$f_1(n)$和$f_2(n)$的 Dirichlet 卷积, 记为$f_1(n) * f_2(n) = f(n)$. 显然, $f(n)$也是一个数论函数, 且有$f_1(n) * f_2(n) = f_2(n) * f_1(n), (f_1(n) * f_2(n)) * f_3(n) = f_1(n) * (f_2(n) * f_3(n))$这里$f_3(n)$也是一个数论函数. Dirichlet 卷积是研究数论函数的重要概念. 可以证明: 全体$f_1 \neq 0$的数论函数 $f(n)$, 对于 Dirichlet 乘积 $*$ 组成一个阿贝尔群.

积性函数和完全积性函数, 若$(m,n) = 1$, 有$f(mn) = f(m)f(n)$, 称数论函数$f(n)$为积性函数; 若对任意正整数m、n, 都有$f(mn) = f(m)f(n)$则称数论函数$f(n)$为完全积性函数,例

如$[\frac{1}{n}]$、n^{λ}是完全积性函数, $\varphi(n),\sigma(n),\sigma_{\alpha}(n)=\sum\limits_{d|n}f_{\alpha}(d)$(其中$f_{\alpha}(n)=n^{\alpha}$)是积性函数, 但非完全积性函数. 曼格尔德特函数 $\wedge(n)$ 是非积性函数.

Mobius 反演公式, 设 n为 正整数, 若$f(n)=\prod\limits_{d|n}g(d)$, 则有$g(n)=\sum\limits_{d|n}f(d)\mu(\frac{n}{d})$, 反之亦然. 这就是著名的 mobius 反演公式. Mobius 反演公式是 Dedekind R.1857年给出的, 它有多种推广形式, 在数论和组合数学中都很有用. 例如由$\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n$, 用 Mobius 反演公式立即可得$\varphi(n)=\sum\limits_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$. 因为$n^u$是积性函数, 所以$\sigma_u(n)=\sum\limits_{d|n}d^u$也是积性函数.

数论应该是数学研究中最古老的分支之一, 它在现代科学技术和基础数学研究中具有特殊和特别重要的地位. 进入新世纪之后, 数论研究被广泛应用于信息系统、计算机科学与技术、通信、密码学等应用领域. 而数论的特殊性又需要研究者具有很强的理论基础, 因此很多数学家都敬而远之, 不敢涉足其中.在当代数论研究过程当中, 很多专家与学者对于特殊数论函数以及未解决的数学问题和包括"哥德巴赫猜想"等一系列数学问题进行了大量深入的研究, 得到了一些非常重要的具有理论价值的科研成果. 其中, 罗马尼亚数论专家 Smarandache F.教授在《Onlyproblems, Notsolutions》一书中提出了关于算术函数、特殊序列等未解决的数学问题及猜想105个; 加拿大数论专家 Guy R K. 所著的《初等数论中未解决的问题》一书中提出的许多问题同样引起了数论爱好者们的研究兴趣; 日本的 KellichiroKashiliara 教授也提出了许多关于 Smarandache 函数的数论问题. 还有很多的数学专家对相关一些问题进行了非常深入的研究, 在结果上也不断地加以论证和解决, 使研究变的不断的深入有趣, 并且研究课题也具有一定的理论意义.

鉴于以上, 本文对一些数论函数的性质进行研究, 得到了关于无平方因子数的一个精确上界估计, 获得一类约数和函数的上界估计, 对一个关于 F. Smarandache LCM 函数的猜想进行探讨, 讨论 Pell 方程$x^2-Dy^2=\pm2$的解的递推性质以及与约数和函数$\delta(n)$有关的一些不等式的解.

2 无平方因子数的上界估计

本章我们研究无平方因子数上界估计. 本章主要内容取自我们的文章[50].

2.1 问题的提出

设$k, m, n \in N$, 对于给定的正整数$n \in N$, 若存在 k, 使得对任意$m \in N$, 都有$m^k \dagger n$, 则称n为无k次幂因子数. 特别地, 若$k = 2$, 则称 n 为无平方因子数. 利用初等方法, 研究无平方因子的性质, 进一步的获得了第 n 个无平方因子数的一个上界估计, 并给出了文献中的一个评注

无 k 次幂因子数是数论中最基础, 最重要的内容之一, 和其它数学分支也有密切联系. 对无 k 次幂因子数, 不少学者进行了深入的研究, 获得一系列重要的结果见文献[9][17][38][46] 1981年, H.L.Montgomery 和 R.C.Vaughan 证明了[38], 设$k \geq 2, Q_k(x)$表示不超过 x 的所有无 k 次幂因子数的个数, 则在广义黎曼假设下有渐进公式:

$$Q_k(x) = x/\xi(k) + O(x^{\frac{1}{1+k}+\varepsilon}) \tag{2.1}$$

这里, ε为任意给定的正数, $\xi(k)$ 为黎曼$\xi-$函数, 特别地,当 $k = 2$ 时, 在广义黎曼假设下有:

$$Q_2(x) = \frac{b}{\pi^2} + O(x^{\frac{9}{28}+\varepsilon}) \tag{2.2}$$

另一方面, 设$a_n(k)$表示第 n 个无 k 次幂因子数, a_n表示第 n 个无平方因子数, Mladem和Krassimir[37]给出了a_n 的一个上界估计:

$$a_n < [\frac{1}{4}(n^2 + 3n + 4)]. \tag{2.3}$$

这里$[x]$表示x的取整函数. 同时, 他们提出了如下两个问题:

问题2.1.1 是否存在一个常数 c, 使得 $a_n < cn$?

问题2.1.2 是否有 $c < 2$?

2006年, Chen. X. G[7]完全解决了这两个问题, 他证明了, $a_n < 1.8n$. 而文献[28]则给出了任意的 $a_n(k)$ 的上界的渐进的估计式.

本节研究了无平方因子数的上界问题, 进一步改进了文献[7]的结论.

2.2 无平方因子数的估计

定理2.2.1 对任意$n \in N$, 有 $a_n < 1.66n$.

先给出如下引理.

引理[17]

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\ \mu(d)\ |}{d^K} = \frac{1}{\xi(k)}.$$

定理的证明 设不超过 x 的无平方因子数的个数为$Q(x)$. 将不大于 x 的正整数按照其最大平方因子 b^2 分类, 不大于 x 而有因子b^2为最大平方因子的正整数个数为$Q(\frac{x}{b^2})$, 则

$$[x] = \sum_{b=1}^{[\sqrt{x}]} Q(\frac{x}{b^2}). \tag{2.4}$$

由Mobius变换, (2.4)以及引理可得,

$$\begin{aligned} Q(x) = \sum_{1\le b\le[\sqrt{x}]} \mu(b)[\frac{x}{b^2}] &\ge \sum_{1\le b\le[\sqrt{x}]} \mu(b)(\frac{x}{b^2}-1) \\ &= x\sum_{1\le b\le[\sqrt{x}]} \frac{\mu(b)}{b^2} - \sum_{1\le b\le[\sqrt{x}]} \mu(b) \\ &\ge x\sum_{b=1}^{\infty} \frac{\mu(b)}{b^2} - x\sum_{b=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{b^2} - \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\xi(2)} - x\sum_{b=[x]+1}^{\infty} \frac{1}{b^2} - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

又因为 $\sum\limits_{b=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{b^2} < \sum\limits_{b=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} \frac{1}{b(b-1)} = \sum\limits_{b=[\sqrt{x}]+1}^{\infty} (\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b}) < [\sqrt{x}]$,则

$$Q(x) \ge \frac{1}{\xi(2)} - 2\sqrt{x}$$

又$\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}$,当$x > 1.6\times 10^5$时,$\sqrt{x} < \frac{1}{\sqrt{10^5}}x < 0.0025x$,则当$x > 1.6\times 10^5$时,

$$Q(x) > (\frac{6}{\pi^2} - 2\times 0.0025)x > 0.6029x$$

则$a_n < \frac{1}{0.6029}n < 1.66n$. 而当$n \le 1.6\times 10^5$ 时, 利用$Q(x)$的表达式可直接用Maple10在计算机上验证, 此时有$a_n < 1.66n$.

2.3 一个注记与问题

利用 Maple10 可验证, 存在很多 m, 使得 $a_m > 1.65m$, 例如, 当$n = 381$时, $Q(n) = 230$, 此时$\frac{Q(n)}{n} = 0.6036745408\cdots$, $\frac{a_{230}}{230} = 1.656521739\cdots$, 因此, 问题2.1.1, 2.1.2中的系数 c 不能改进为1.65或者1.65以下.

文献[28]指出, 问题2.1.1, 2.1.2中的系数 c 满足 $c > 1.64493$, 这实际上是不正确的. 事实上, 通过计算机验证有, 当$984 \le m \le 1007$时, 均有$a_m < 1.64m$, 例如, $n = 1610, Q(n) = 984$, 则$\frac{a_{984}}{984} = 1.636178862\cdots$.

因此, 我们提出以下问题

问题2.3.1 c 最小能取多大?

3 一类约数和函数的上界估计

本章我们研究一类约数和函数的上界估计. 本章主要内容取自我们的文章[51].

3.1 三个引理

对于正整数 k, 设 $\sigma(k)$ 是 k 的不同约数之和. 运用初等数论方法, 利用等幂和的 Bernoulli 展开式, 得到了关于 $\sigma(k)$ 的和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma(k^r)$ 上界的估计

设 N 是全体正整数的集合, 对于正整数 k, 设 $\sigma(k)$ 是 k 的约数之和即

$$\sigma(k)=\sum_{d|k}d$$

约数和函数$\sigma(k)$是一类重要的数论函数, 有许多关于 $\sigma(k)$ 的问题和课题, 例如历史上著名的完全数问题与该函数有关见文献[4][6][16] [45].

问题3.1 最近, M. Bencze 和 J.Sdndor 提出如下问题[4][45].

确定不等式

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k^2)\leq\frac{c}{4}n^2(n+1)^2,0<c\leq 1,n\in N \tag{3.1}$$

中常数 c 的最佳值问题. 在文献[25]中, 乐茂华证明了常数 c 的最佳值 $c_0=1$.

本节推广了文献[45] 的结论, 对于 $r\geq 2$, 运用初等数论的方法, 利用等幂和的 Bernoulli 展开式, 得到了关于 $\sigma(k)$ 的和式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma(k^r)$ 的较为精确的上界的估计.

引理3.1.1 如果 $r\geq 2$, 且 $k>8r\log r$, 则 $\log k<\frac{k}{2r}$.

证明 令 $f(k)=\frac{k}{2r}-\log k$, 则 $f'(k)=\frac{1}{2r}-\frac{1}{k}$. 可得. 因此, 当 $k>8r\log r$ 时,$f'(k)>0$, 即 $f(k)$ 为增函数, 于是

$$\begin{aligned}
& f(k)-f(8r\log r)=\frac{8r\log r}{2r}-\log(8r\log r)\\
= & \ 4\log r-\log 8r-\log(\log r)\\
= & \ 3\log r-\log 8-\log(\log r)>0
\end{aligned}$$

故$f(k)>f(8r\log r)$, 所以引理(3.1.1)得证.

引理3.1.2 当$k>3$时,$\sigma(k)<2k\log k$.

证明 见文献[4]的引理3.

引理3.1.3 当$m\geq 1$时,有

$$\sum_{j=1}^{n}j^m=\frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}B_j(n+1)^{m+1-j} \tag{3.2}$$

其中B_j为Bernoulli 数.

证明 见文献[4]的引理1.

3.2 约数和函数$\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma(k^r)$的上界

定理3.2.1 令$n_0=[8r\log r]$,而且

$$C_{n_0}=2r\sum_{k=1}^{n_0}k^r\log k, D_{n_0}=\sum_{k=1}^{n_0}k^{r+1},$$

则

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma(k^r)\leq C_{n_0}+\frac{1}{r+2}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{k+2}{k}B_k(n+1)^{r+2-k}-D_{n_0}. \tag{3.3}$$

证明 由引理3.1.1和引理3.1.2以及(3.2)可得,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\sigma(k^r)\leq\sum_{k=1}^{n}2k^r\log k^r=2r\sum_{k=1}^{n}k^r\log k\\
=&\ 2r\sum_{k=1}^{n_0}k^r\log k+2r\sum_{k=n_0+1}^{n}k^r\log k\\
=&\ 2r\sum_{k=1}^{n_0}k^r\log k+\sum_{k=n_0+1}^{n}k^{r+1}\\
=&\ 2r\sum_{k=1}^{n_0}k^r\log k+(\sum_{k=0}^{n}k^{r+1}-\sum_{k=0}^{n}k^{r+1})\\
=&\ C_{n_0}+\frac{1}{r+2}\sum_{k=0}^{r+1}\binom{k+2}{k}B_k(n+1)^{r+2-k}-D_{n_0}
\end{aligned}$$

所以定理得证.

3.3 两个推论

由定理3.2.1我们得到如下推论

推论3.3.1 若$n\geq 12$,则

$$\sum_{k=0}^{n}\sigma(k^2)<\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-109. \tag{3.4}$$

证明 在定理中令$r=2$,则$n_0=11$,于是

$$C_{11}=4\sum_{k=1}^{11}k^2logk=4265.58\cdots, D_{11}=\sum_{k=1}^{11}k^3=4356,$$

由于$\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, 则由(3.3)可得,

$$\sum_{k=0}^{n} \sigma(k^2) < \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - 109.$$

因此推论3.3.1得证.

显然, 推论3.3.1中的(3.4) 式比文献[45]中的主要结果要强一些.

推论3.3.2 (1)当$n \geq 26$时, 有$\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma(k^3) < \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

(2)当$n \geq 44$时, 有$\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma(k^4) < \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$.

(3)当$n \geq 64$时, 有$\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma(k^5) < \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n$.

(4)当$n \geq 86$时, 有$\sum\limits_{k=0}^{n} \sigma(k^6) < \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2$.

证明 当$r = 3$时, $n_0 = 26$,

$$C_{26} = 6\sum_{k=1}^{26} k^3 logk = 2237377,\ D_{26} = \sum_{k=1}^{26} k^4 = 2610621,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \sigma(k^3) &< \sum_{k=1}^{n} k^4 + C_{26} - D_{26} = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n - 373244 \\ &< \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n\end{aligned}$$

同理可得, 当$r = 4, n_0 = 44$时,$C_{44} = 1003395995, D_{44} = 1293405300$,则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sigma(k^4) &< \sum_{k=1}^{n} k^5 + C_{44} - D_{44} = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 - 2.9 \times 10^8 \\ &< \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2.\end{aligned}$$

当$r = 5, n_0 = 64$,时,$C_{64} = 479870897100, D_{64} = 663188924320$,则

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sigma(k^5) &< \sum_{k=1}^{n} k^6 + C_{64} - D_{64} = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n - 1.84 \times 10^{11} \\ &< \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n.\end{aligned}$$

当$r=6, n_0=86$,时,$C_{86}=268100758810000, D_{86}=391654781594121$,则

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sigma(k^6) &< \sum_{k=1}^{n}k^7+C_{86}-D_{86} \\
&= \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2-1.236\times10^{14} \\
&< \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2.
\end{aligned}
$$

4 一个关于Smarandache LCM函数的猜想

本章我们研究一个关于 Smarandache LCM 函数的猜想. 本章主要内容取自我们的文章[52].

4.1 关于Smarandache LCM函数的猜想

Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 k, 使得 $n|[1,2,...,k]$, 其中 $[1,2,...,k]$ 表示为 $1,2,...,k$ 的最小公倍数. 例如, $SL(n)$ 的前几项值依次为 $SL(1)=1$, $SL(2)=2$, $SL(3)=3$, $SL(4)=4$，$SL(5)=5$, $SL(6)=3$, $SL(7)=7$, $SL(8)=8$, $SL(9)=9$, $SL(10)=5$, $SL(11)=11$, $SL(12)=4$, $SL(13)=13$, $SL(14)=7$, $SL(15)=5$, $SL(16)=16...$, 从 $SL(n)$ 的定义很容易推出: 如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ 是 n 的素因子分解式, 那么

$$SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},...,p_r^{\alpha_r}\} \tag{4.1}$$

关于 $SL(n)$ 的一些性质, 很多学者进行了深入细致的研究见[1][9][20][22] [30][38][42][43][46] [55][56] , 得到了许多有趣的性质. 在文献[56] 中, 张文鹏教授建议研究如下问题:

问题 设 $\sum\limits_{d|n}$ 表示 n 的所有正因子, 和式 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 在什么时候是正整数?

文献[49][57] 中研究了这一问题, 并获得了一些特殊的结论. 例如, [49]中证明了当 n 为素数方幂或者 n 为无平方因子的数时, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 不可能是整数. [57] 中证明了若 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 为整数, 则 n 为 Square-full 数 (幂数). 以上研究支持如下猜想:

猜想 和式 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 为整数当且仅当 $n=1,36$.

本节研究了以上问题, 对另外一些特殊类型的整数 n, 得出了一些结果. 本节的主要结论是

定理4.1.1 若 $n=4p^{\alpha}$, p 为素数, 则当且仅当 $n=36$ 时, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 为整数.

定理4.1.2 若 n 的标准分解式为 $n=4p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, 且 $p_1<...<p_r$, 则当 $r\geq 2$ 且 $p_1\geq 5$ 时, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 不是整数.

4.2 定理4.1.1的证明

若 $p=3$, 则 $n=4\cdot 3^{\alpha}$, 于是当 $\alpha\geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}&=\sum_{d|3^{\alpha}}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|3^{\alpha}}\frac{1}{SL(2d)}+\sum_{d|3^{\alpha}}\frac{1}{SL(4d)} \\ &= (1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{\alpha}})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^{\alpha}})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{\alpha}}) \\ &= 2+\frac{2}{3}+3(\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{\alpha}}) \\ &= 3+(\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{\alpha-1}})\end{aligned} \tag{4.2}$$

显然上式不为整数. 当 $\alpha=1,2$ 时, 可直接验证, 仅当 $n=36$ 时, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}=3$ 为整数.

若 $p\geq 5$, 则 $SL(2p^{\alpha})=p^{\alpha}, SL(4p^{\alpha})=p^{\alpha}$, 由于 $\alpha\geq 1$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}&=\sum_{d|p^{\alpha}}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|p^{\alpha}}\frac{1}{SL(2d)}+\sum_{d|p^{\alpha}}\frac{1}{SL(4d)} \\ &= (1+\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p^{\alpha}})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p^{\alpha}})+(\frac{1}{4}+\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p^{\alpha}}) \\ &= 1+\frac{3}{4}+3(\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p^{\alpha}}) \\ &= 1+\frac{3}{4}+...+\frac{3(1-1/p^{\alpha})}{p-1}\end{aligned}$$

不为整数, 因此定理4.1.1 得证.

4.3 定理4.2.2的证明

令 $n=4n', n'=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$, 由于 $p_1<...<p_r$, 且 $p_1\geq 5$, 则当 $\alpha\geq 1$ 时, 有 $SL(p^{\alpha})=p^{\alpha}, SL(2p^{\alpha})=p^{\alpha}, SL(4p^{\alpha})=p^{\alpha}$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{d|n}\frac{1}{SL(d)}&=\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}+\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(2d)}+\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(4d)} \\ &= 3\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}+\frac{5}{4}\end{aligned} \tag{4.3}$$

如果 $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 为整数,

则由(4.3) 可得,

$$\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)}=\frac{A}{4} \tag{4.4}$$

其中 $A \equiv 1(\mod 4)$. 但

$$\begin{aligned}\sum_{d|n'}\frac{1}{SL(d)} &= 1+\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_1^{\alpha_1}}+...+\frac{1}{p_2}+...+\frac{1}{p_j^{\alpha_j}}+...+\frac{1}{p_r^{\alpha_r}} \\ &= \frac{B}{p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}}\end{aligned} \tag{4.5}$$

于是由(4.4), (4.5) 可得

$$p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}A = 4B \tag{4.6}$$

这显然是不可能的, 因此, $\sum\limits_{d|n}\frac{1}{SL(d)}$ 不是整数, 定理4.2.2得证.

5 Pell方程$x^2 - Dy^2 = \pm 2$的解的递推性质

本章我们研究方程Pell方程$x^2 - Dy^2 = \pm 2$的解的递推性质. 本章主要内容取自我们的文章[53].

在各类不定方程中, Pell方程 $x^2 - Dy^2 = N$ 是一类基础而重要的 Diopha- ntine 方程, 其正整数解与实二次域的基本单位以及其它代数数论理论有密切联系, 对解高次丢翻图方程以及有关递推数列问题时有广泛而且深入的应用.

本节利用 Pell方程的基本解的性质, 对于方程$x^2 - Dy^2 = \pm 2$的通解进行了讨论, 获得了该方程解的一个三阶递推性质, 证明了 Tekcan 在2004年在Irish Math. Soc. Bulletin上提出的一个猜想. 最后, 提出了关于Pell方程$x^2 - Dy^2 = -2$可解性的一些待解决的问题.

5.1 Tekcan的一个递推关系

令$D > 1$是无平方因子整数, N为非零整数, Pell方程

$$x^2 - Dy^2 = N \tag{5.1}$$

是一类基础而重要的 Diophantine 方程, 它的正整数解与实二次域的基本单位以及其它代数数论理论有密切联系见[10][12] [13][15] 例如: 设$O_D = \{x + y\rho_D : x, y \in Z\}$,

$$\rho_D = \begin{cases} \sqrt{\frac{D}{4}}, \ ifD \equiv 0(\mod 4), \\ \frac{1+\sqrt{D}}{2}, \ ifD \equiv 1(\mod 4). \end{cases}$$

令$\alpha \in O_D$, 如果 α 为 O_D 的单位根, 当且仅当 $N(\alpha) = \pm 1$. Pell方程在解高次丢翻图方程, 以及有关递推数列问题时有广泛而且深入的应用. 关于Pell方程(5.1)的其他方面的许多应用, 及在其它分支,诸如群论、组合等诸多应用,可参见文献[10][13] [27][34][35][39] [40][41]

2004年, Tekcan[48]利用连分数的性质以及代数数论的基本理论, 对方程(5.1)当$N = 2$时的情形进行了研究, 即对方程

$$x^2 - Dy^2 = 2 \tag{5.2}$$

的解进行了深入细致的讨论. 在文献[48]中, Tekcan 提出了以下猜想(见[48]中猜想2.6):

猜想 设(k, l)是方程(5.2)的基本解, 则当$n \geq 4$时, 方程(5.2)的通解(X_n, Y_n)满足下列递推关系:

$$X_n = (2k^2 - 1)(X_{n-1} - X_{n-2}) + X_{n-3}, \ \ Y_n = (2k^2 - 1)(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + Y_{n-3}.$$

而且文[48]验证了: 当$n \leq 9$时, 以上猜想成立.

本节利用 Pell方程的基本解的性质, 对于方程

$$x^2 - Dy^2 = \pm 2 \tag{5.3}$$

的通解进行了讨论, 获得了方程解的一个递推性质, 证明了Tekcan的猜想. 本节的主要结论是:

定理 令$\eta\in\{1,-1\}$, 且(k,l) 是Pell方程$x^2-Dy^2=2\eta$的基本解, 当$n\geq 4$时, 该Pell方程的通解X_n,Y_n 满足

$$\begin{cases} X_n=(2k^2-\eta)(X_{n-1}-\eta X_{n-2})+\eta X_{n-3}, \\ Y_n=(2k^2-\eta)(Y_{n-1}-\eta Y_{n-2})+\eta Y_{n-3}. \end{cases} \tag{5.4}$$

5.2 猜想的推广及证明

首先我们给出一个引理.

引理 如果$D>2$, 且方程(5.3)有解, 令$\lambda_\eta=k+l\sqrt{D}$为方程$x^2-Dy^2=2\eta$的基本解, 则方程的通解(X_n,Y_n) 为

$$X_n+Y_n\sqrt{D}=\frac{\lambda_\eta^{2n+1}}{2^n}. \tag{5.5}$$

该引理由文献 [5] P162-164中的定理7, 8推出, 具体推证过程可参见文献 [5] P164-165.

定理的证明 设$D>2$, 且(X_n,Y_n)为方程(5.2)的解, 则由引理可得,

$$\begin{aligned} & (2k^2-\eta)(X_{n-1}-\eta X_{n-2})+\eta X_{n-3}+\Big((2k^2-\eta)(Y_{n-1}-\eta Y_{n-2}) \\ & +\ \eta Y_{n-3}\Big)\sqrt{D} \\ = \ & (2k^2-\eta)\big(X_{n-1}+Y_{n-1}\sqrt{D}-\eta(X_{n-2}+Y_{n-2}\sqrt{D})\big)+\eta\big(X_{n-3}+Y_{n-3}\sqrt{D}\big) \\ = \ & (2k^2-\eta)\Big(\frac{\lambda_\eta^{2n-1}}{2^{n-1}}-\eta\frac{\lambda_\eta^{2n-3}}{2^{n-2}}\Big)+\eta\frac{\lambda_\eta^{2n-5}}{2^{n-3}} \\ = \ & \frac{\lambda_\eta^{2n-5}}{2^{n-1}}\Big((2k^2-\eta)\big(\lambda_\eta^4-2\eta\lambda_\eta^2\big)+4\eta\Big) \end{aligned} \tag{5.6}$$

下面来计算$(2k^2-\eta)\big(\lambda_\eta^4-2\eta\lambda_\eta^2\big)+4\eta$. 由于$\lambda_\eta=k+l\sqrt{D}$ 是方程$x^2-Dy^2=2\eta$的基本解, 因此将λ_η 代入上式可得,

$$\begin{aligned} & (2k^2-\eta)\big(\lambda_\eta^4-2\eta\lambda_\eta^2\big)+4\eta \\ = \ & (2k^2-\eta)\big((k^4+6k^2l^2D+l^4D^2)+(4k^3l+4kl^3D)\sqrt{D} \\ & -2\eta((k^2+l^2D)+2kl\sqrt{D})\big)+4\eta \\ = \ & (2k^6+12k^4l^2D+2k^2l^4D^2-5k^4\eta-10\eta k^2l^2D-\eta l^4D^2 \\ & +2\eta^2k^2+2\eta^2l^2D+4\eta)+(8k^5l+8k^3l^3D+4\eta k^3l-4\eta kl^3D-4\eta^2kl)\sqrt{D} \end{aligned} \tag{5.7}$$

由于$k^2 - l^2D = 2\eta$, 因此将$k^2 = 2\eta + l^2D$代入上式的有理部分可得,

$$\begin{aligned} & 2k^6 + 12k^4l^2D + 2k^2l^4D^2 - 5k^4\eta - 10\eta k^2l^2D - \eta l^4D^2 \\ & +2\eta^2k^2 + 2\eta^2l^2D + 4\eta \\ = \ & 2(8\eta^3 + 12\eta^2l^2D + 6\eta l^4D^2 + l^6D^3) + 12(4\eta^2 + 4\eta l^2D \\ & +l^4D^2)l^2D + 2(2\eta + l^2D)l^4D^2 - 5(4\eta^2 + 4\eta l^2D + l^4D^2)\eta \\ & -10\eta(2\eta + l^2D)l^2D - l^4D^2\eta + 2(2\eta + l^2D)\eta^2 + 2\eta^2l^2D + 4\eta \\ = \ & 36\eta^2l^2D + 48\eta l^4D^2 + 16l^6D^3 + 4\eta. \end{aligned} \tag{5.8}$$

现在来计算$\frac{1}{2}\lambda_\eta^6$的有理部分, 将$\lambda_\eta = k + l\sqrt{D}$及$k^2 = 2\eta + l^2D$代入可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}k^6 + \frac{15}{2}k^4l^2D + \frac{15}{2}k^2l^4D^2 + \frac{1}{2}l^6D^3 \\ = \ & 4\eta^3 + 6\eta^2l^2D + 3\eta l^4D^2 + \frac{1}{2}l^6D^3 + 30\eta^2l^2D + 30\eta l^4D^2 + \frac{15}{2}l^6D^3 \\ & +15\eta l^4D^2 + \frac{15}{2}l^6D^3 + \frac{1}{2}l^6D^3 \\ = \ & 36\eta^2l^2D + 48\eta l^4D^2 + 16l^6D^3 + 4\eta^3. \end{aligned} \tag{5.9}$$

由(5.8), (5.9)可得, 由于$\eta = \pm 1$, 则$(2k^2 - \eta)(\lambda_\eta^4 - 2\eta\lambda_\eta^2) + 4\eta$与$\frac{1}{2}\lambda_\eta^6$ 的有理部分相等. 用同样的方法可验证, 它们的无理部分也相等. 因此

$$(2k^2 - \eta)\big(\lambda_\eta^4 - 2\eta\lambda_\eta^2\big) + 4\eta = \frac{1}{2}\,\lambda_\eta^6. \tag{5.10}$$

由(5.6), (5.10)可得,

$$\begin{aligned} (2k^2 - \eta)(X_{n-1} - \eta X_{n-2}) \ &+\ \eta X_{n-3} + \Big((2k^2 - \eta)(Y_{n-1} - \eta Y_{n-2}) \\ +\eta Y_{n-3}\Big)\sqrt{D} \ &=\ \frac{1}{2}\,\lambda_\eta^6 \cdot \frac{\lambda_\eta^{2n-5}}{2^{n-1}} \ =\ \frac{\lambda_\eta^{2n+1}}{2^n} \end{aligned} \tag{5.11}$$

故由引理知, 此时(5.4)式成立.

当$D = 2$时, 令$X = y, Y = \frac{x}{2}$, 则方程(5.2)变为

$$X^2 - 2Y^2 = \pm 1. \tag{5.12}$$

由于方程(5.12)的基本解为$\lambda_1 = 3 + 2\sqrt{2}$, $\lambda_{-1} = 1 + \sqrt{2}$, 则方程的所有解可分别表为$X_n + Y_n\sqrt{2} = \lambda_1^n$以及$X_n + Y_n\sqrt{2} = \lambda_{-1}^{2n-1}$, 可直接验证此时(5.4)式也成立.

因此定理得证.

5.3 一些待解决的问题

利用文献[5]中Pell方程解的基本结论, 对任意的Pell方程(5.1), 运用本节的方法, 也可得到其解的类似的递推性质.

令D为奇数, 在方程

$$x^2-Dy^2=-2 \tag{5.13}$$

中, 对方程(5.13)两边取Legendre符号可知, 当D满足$D\equiv 3(\mod 8)$且不含素因子$p\equiv 5,7(\mod 8)$时, 方程才可能有解. 反过来, 如果D满足$D\equiv 3(\mod 8)$且不含素因子$p\equiv 5,7(\mod 8)$, 方程(5.13)一定有解吗? 例如, 当$D=219=3*73$时, 方程$x^2-219y^2=-2$就没有正整数解. 我们通过计算机搜索, 当$D<1000$且D无平方因子时, 仅有以下的6个D值使方程(5.13)无解,

$$D=219,\ 323,\ 579,\ 723,\ 939,\ 979.$$

因此我们提出如下问题:

问题5.3.1 当奇数 D 取何值时, 方程(5.13)有正整数解?

问题5.3.2 存在无穷多个素数 p , 使得方程 $x^2-3p\,y^2=-2$ 没有正整数解吗?

6 与约数和函数$\delta(n)$有关的一些不等式的解

本章我们研究与约数和函数$\delta(n)$有关的一些不等式的解. 本章主要内容取自我们的文章[54].

约数和函数是一类基本而又重要的数论函数. 对任意$n \in N$, 设n的标准分解式为$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$, 令$\sigma(n)$是$n$的约数和, 则

$$\sigma(n) = \sigma(p_1^{\alpha_1}) \cdots \sigma(p_s^{\alpha_s}) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

约数和函数$\sigma(n)$是一类基本而又重要的数论函数, 历史上许多著名数学难题都与此函数有关[14][18] 例如, 有关完全数的各类问题, $\sigma(n)$ 与 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的迭代等等.

本节推广了由 Bencze 提出的两个公开问题的结论, 证明了对于任意给定的正整数k和非零整数b, 均存在无穷多个正整数n, 使得以下不等式成立: $\sigma(n) - \sigma(n+b) > kn, \sigma(n) > k\sigma(n+1)$和$\sigma(n) > k\sigma(n-1)$, 其中$\delta(n)$为任意正整数$n$的不同约数之和.

6.1 Bencze的两个公开问题

2004-2006年, M. Bencze Le[2][3] 提出以下两个公开问题:

问题A 对于任何正整数 k, 是否都存在无穷多个正整数n , 可使不等式

$$\sigma(n) > n + n^{\frac{1}{2}} + \cdots\cdots + n^{\frac{1}{k}} \tag{6.1}$$

成立?

问题B 是否存在无穷多个正整数n , 可使不等式

$$\sigma(n) > \sqrt{\sigma(n+1)\sigma(n-1)} \tag{6.2}$$

成立?

随后, 乐茂华[23]证明了, 对于正整数k, 存在无穷多个正整数n 适合(6.1). 若令p_i为第i个素数, 由于级数$\prod_{i=1}^{\infty}(1+\frac{1}{p_i})$是发散的, 因此文[23]实际上证明了, 对于给定的正整数k, 均存在无穷多个正整数n 适合

$$\sigma(n) > kn \tag{6.3}$$

在文献[24]中, 乐茂华证明了, 当$n = 2^p$且p为素数时, (6.2)式成立. 因此, 问题A、问题B的答案都是肯定的.

本节将推广文献[23] [24] 的结论, 研究以下问题:

问题6.1.1 对于任意给定的正整数k和非零整数b, 是否存在无穷多个正整数n, 使得不等式

$$\sigma(n) - \sigma(n+b) > kn \tag{6.4}$$

成立?

本节首先给出了问题6.1.2的一个肯定回答, 构造性地证明了存在无穷多个正整数n, 使得(6.3)成立. 进而, 我们提出如下问题:

问题6.1.2 对于任意给定的正整数k, 是否存在无穷多个正整数n, 使得不等式

$$\sigma(n) > k\sigma(n+1), \sigma(n) > k\sigma(n-1) \tag{6.5}$$

同时成立?

本节讨论了问题6.1.2, 给出了它的一个构造性结果. 在最后, 我们提出了关于以上问题的进一步加强的一些研究课题.

6.2 不等式$\sigma(n)-\sigma(n+b)>kn$的条件

定理6.2.1 对于任意给定的正整数k和非零整数b, 均存在无穷多个正整数n, 使得不等式(6.4)成立.

证明 根据文献[19]的定理1.9.1可知, 对于正整数m, 如果m的标准分解式为$m = p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdot\cdot\cdot p_k^{r_k}$ 则

$$\sigma(m) = \prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{r_{i+1}}-1}{p_i-1} = m\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{p_i}+\cdots\cdots+\frac{1}{p_i^{r_i}})$$

令p_i为相异的素数, $i=1,2,\cdots$, 取$n = p_1p_2\cdots p_s l$ 其中l为正整数, 且$\gcd(p_1p_2\cdots p_s, b) = 1$, 使得$n+b$为素数, 则

$$\begin{aligned} & \sigma(n)-\sigma(n+b) \\ \geq\ & n\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{p_i})-(n+b+1) \\ =\ & n(\prod_{i=1}^{k}(1+\frac{1}{p_i})-(1+\frac{b+1}{n})) \\ >\ & n(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots\frac{1}{p_s}-\frac{b+1}{n}) \end{aligned} \tag{6.6}$$

根据素数分布的 Mertens 形式估计的结果, 有

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x+\beta+O(\frac{1}{\log x}) \tag{6.7}$$

其中β为常数, 则级数$\sum\limits_{i=1}^{s}\frac{1}{p_i}$是发散的, 因此对于任意正整数$k$, 可取满足$\gcd(p_1p_2\cdots p_s, b) = 1$的素数$p_i, i=1,2,\cdots,s$, 使得

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots\frac{1}{p_s}-\frac{b+1}{n} > k \tag{6.8}$$

从由(6.6), (6.8)可知, $\sigma(n)-\sigma(n+b)>kn$. 又由 Dirichlet 定理可得[18], 当$\gcd(p_1p_2\cdots p_s,b)=1$时, 若 l 为正整数, 则形如 $p_1p_2\cdots p_s,l+b$ 的素数有无穷多个, 因此存在无穷多个正整数 n, 使得不等式(6.3)成立.

于是定理6.2.1得证.

6.3 不等式组$\sigma(n)>k\sigma(n+1),\sigma(n)>k\sigma(n-1)$的解

在证明定理6.3.1之前, 我们先给出如下引理.

引理 若p, q为素数, a为正整数, 且 p 满足$p\mid\frac{a^q+1}{a+1}$, 或$p\mid\frac{a^q-1}{a-1}$, 则$p\equiv 1(mod2q)$.

证明 见文献[19]中p22-23.

定理6.3.1 对于任意给定的正整数 k, 均存在无穷多个正整数 n, 使得不等式

$$\sigma(n)>k\sigma(n+1),\sigma(n)-\sigma(n-1)>kn$$

同时成立.

证明 令$n=a^q$, 其中 q 为奇素数, p_i 为第 i 个素数, $i=1,2,\cdots$, 取

$$a=p_1p_2\cdots p_m$$

且$a+1$的标准分解式为$a+1=q_1^{\alpha_1}\cdots q_s^{\alpha_s}$, $\frac{n+1}{a+1}$的标准分解式为$\frac{a^q+1}{a+1}=r_1^{\beta_1}\cdots r_t^{\beta_t}$. 由引理可得, $q_j\equiv 1(\mod 2q)$, 由于$\gcd(a+1,\frac{a^q+1}{a+1})\mid q$, 则$\gcd(a+1,\frac{a^q+1}{a+1})=1$. 于是

$$\begin{aligned}\sigma(n+1)&=\sigma(a+1)\sigma(\frac{a^q+1}{a+1}) \\ &= (a^q+1)\prod_{i=1}^{s}(1+\frac{1}{q_i}+\cdots\frac{1}{q_i^{\alpha_i}})\prod_{i=1}^{t}(1+\frac{1}{r_i}+\cdots\frac{1}{r_i^{\beta_i}})\end{aligned} \tag{6.9}$$

由于$(q_j,a)=1$, 则 $q_j>p_m$, 令$a=\alpha_1+\cdots+\alpha_s$, 则 $a+1\geq p_{m^a}$, 即$a\geq p_{m^a}$, 则 $s\leq a<\frac{\log a}{\log p_m}<\frac{\log p_1+\cdots+\log p_m}{\log p_m}<m$, 因此,

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{s}(1+\frac{1}{q_i}+\cdots\frac{1}{q_i^{\alpha_i}})<\prod_{i=1}^{s}\frac{q_i}{q_i-1} \\ <&\ \frac{p_{m+1}}{p_{m+1}-1}\cdot\frac{p_{m+1}+2}{p_{m+1}+1}\cdots\frac{p_{m+1}+2m}{p_{m+1}+2m-2}<2\end{aligned} \tag{6.10}$$

令$\beta=\beta_1+\cdots+\beta_s$, 由于$r_j\geq 2q+1$, 则$\frac{a^q+1}{a+1}\geq(2q+1)^{\beta}$, 由于$q>a^r$, 则

$$\beta<\frac{q\log a}{\log(2q+1)}<\frac{q\log a}{\log(a^r+1)}<\frac{q}{r},$$

因此

$$\prod_{i=1}^{s}(1+\frac{1}{q_i}+\cdots\frac{1}{q_i^{\alpha_i}})<\prod_{i=1}^{s}(1+\frac{1}{q_i})^{\alpha_i}<(1+\frac{1}{2q+1})^{\alpha}<(1+\frac{1}{2q+1})^{\frac{q}{r}}<e^{\frac{1}{r}} \tag{6.11}$$

其中 e 为自然对数的底.

于是由(6.9)(6.10)(6.11)可得,

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(n)}{\sigma(n+1)}&=\frac{a^q}{a^q+1}\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(1+\frac{1}{p_i})}{\prod\limits_{i=1}^{s}(1+\frac{1}{q_i}+\cdots\frac{1}{q_i^{\alpha_i}})\prod\limits_{i=1}^{s}(1+\frac{1}{r_i}+\cdots\frac{1}{r_i^{\beta_i}})} \\ &>\frac{a^q}{a^q+1}\cdot\prod_{i=1}^{m}(1+\frac{1}{p_i})\cdot\frac{1}{2e}>\frac{1}{6}\prod_{i=1}^{m}(1+\frac{1}{p_i})>\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}\end{aligned} \tag{6.12}$$

由(6.3)式可得, $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}$可以任意大, 因此, 对于任意给定的正整数$k$, 均存在无穷多个正整数 n, 使得 $\sigma(n)>k\sigma(n+1)$.

用同样的方法, 利用引理同理可证, 取$a=p_1p_2\cdots p_m, n=a^q$ 其中 q 为奇素数, p_i 为第 i 个素数, $i=1,2,\cdots$,必有

$$\frac{\sigma(n)}{\sigma(n-1)}>\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{p_i}$$

因此, 对于任意给定的正整数 k, 均存在无穷多个正整数 n, 使得$\sigma(n)>k\sigma(n-1)$.

定理6.3.1得证.

6.4 进一步的问题

进一步的问题是:

问题6.4.1 对于任意给定的正整数 k 和非零整数b_1,b_2, 且$b_1\neq b_2$, 是否存在无穷多个正整数 n , 使得不等式

$$\sigma(n)>k\sigma(n+b_1),\sigma(n)>k\sigma(n+b_2), \tag{6.13}$$

同时成立?

问题6.4.2 对于任意给定的正整数 k 和非零整数 b_1,b_2, 且$b_1\neq b_2$, 是否存在无穷多个正整数 n, 使得不等式

$$\sigma(n)-\sigma(n+b_1)>kn,\sigma(n)-\sigma(n+b_2)>kn, \tag{6.14}$$

同时成立?

参考文献

[1] Apostol Tom M. *Introduction to analytic number theory*[M]. New York: Spri- nger-Verlag, 1976.

[2] Bencze M. *Proposed problem 4935*[J]. Octogon Math Mag, 2004, **12(2B)**: 824.

[3] Bencze M.*Open question 2327*[J]. Octogon Math Mag, 2006, **14(2)**: 872.

[4] Bencze M, Sandor J. *Open question 2632* [J]. Octogon Math Mag, 2007, **15 (2B)**: 1197-1198.

[5] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨工业大学出版社, 1989, 3: 46-47, 164-165.

[6] 曹珍富. 数论中的问题与结果[M]. 哈尔滨工业大学出版社, 1996.

[7] Chen Xi-geng, *Two problems about 2-power free numbers*[J]. Scientia Magna, 2006, **2(1)**: 70-71.

[8] Cohn G L. *On a conjecture of Makowski and Schinzel*[J]. Coloq Math, 1994, 74: 1-8

[9] Dumitrescu C, Seleace V. *Some solutions and questions in number theory*[M]. Glendale:Erthus Univ Press, 1994.

[10] Epstein P. *Zur Auflosbarkeit der Gleichung* $x^2 - Dy^2 = 1$[J]. Reine Angew. Math. 1934, 171: 243-252.

[11] Erdos P. *Remarks on number theory II:some problems on the* σ *function* [J]. Acta Arith. 1959, 5: 171-177.

[12] Flath D E.*Introduction to Number Theory*[M]. Wiley, 1989.

[13] Grytczuk A, Luca F, Wojtowicz M. *The negative Pell equation and Pythagorean triples*[J]. Proc. Japan Acad. 2000, **76(1)**: 91-94.

[14] Guy R K. *Unsolved problems in number theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1981: 25-56.

[15] Guy R K. *Unsolved problem in number theory* (Third Edition)[M]. New York: Springer- Verlag, 2004: 4-10.

[16] Guy R K. *Unsolved problems in number theory EM3.3rd ed*[M].Beijing: Beijing Science Press, 2007: 71-158.

[17] Hardy G H, Wright E M. *An introduction to the theory of numbers* [M]. Oxford: Oxford Univ Press, 1981.

[18] 华罗庚. 数论导引[J]. 北京: 科学出版社, 1975: 301-326.

[19] 华罗庚. 数论导引[J]. 北京: 科学出版社, 1979, 1: 13-14.

[20] Jian G. *Mean value of Smarandache LCM function*[J]. Scientia Magna, 2007, **3(2)**: 109-122

[21] 乐茂华. *Gel'fond-Baker*方法在丢番图方程中的应用[J]. 北京: 科学出版社, 1998: 107-110.

[22] Le M H. *An equation concerning the Smarandache LCM function*[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.

[23] 乐茂华. 关于数论函数$\delta(n)$的一个公开问题[J]. 广东教育学院学报, 2007, **27(5)**: 9-10.

[24] 乐茂华. 关于数论函数$\delta(n)$的一个问题[J]. 周口师范学院学报, 2007, **27(5)**: 1-2.

[25] 乐茂华. 关于一个不等式的最佳常数[J]. 广东教育学院学报, 2009, **29(3)**: 9-10.

[26] Lenstra Jr H W. *Solving the Pell Equation*[J]. Notices Amer. Math. Soc. 2002, 49: 182-92.

[27] Li K Y. *Mathematical Excalibur*[J]. Pell Equation, 2001, 6: 1-4.

[28] 李江华. 关于无k次幂因子数的上界估计[J]. 纺织高校基础科学学报, 2007, **2(2)**: 122-123.

[29] 廖群英, 李波. 二元域上对称循环矩阵的非退化性[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2011, **34(3)**: 422-426.

[30] Lv Z T. *On the F.Smarandache LCM function and its mean value,Scientia Magna*[J]. 2007, **3(1)**: 22-25.

[31] Luca D F, Pomerance C. *On some problems of Makowski-Schinzel and Erdos concerning the arithmetical functions* φ *and* σ[J]. Colloq. Math. 92, 2002, 1: 111-130.

[32] 柯召, 孙琦. 论一类型积性数论函数方程[J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1965: 21-10.

[33] Makowski A, Schinzel M A. *On the functions* $\sigma(n)$ *and* $\varphi(n)$ [J]. Coloq Math, 1964, 113: 95-99.

[34] Matthews K. *The Diophantine Equation* $x^2 - Dy^2 = N, D > 0$[J]. Expositiones Math. 2000, 18: 323-331.

[35] McLaughlin J. *Multi-Variable Polynomial Solutions to Pell Equation and Fundamental Units in Real Quadratic Fields*[J]. Pacific J. Math. 2003, 210: 335-49.

[36] 梅永刚. 关于一些数论函数的性质研究[D]. 西北大学, 2010, 1-3.

[37] Mladen V, Krassimir T. *Remarks on some of the Smarandache's problem, Part 2* [J]. Scientia Magna, 2005, **1(2)**: 1-26.

[38] Montgomery L, Vaughan H R C. *The distribution of squarefree numbers, recent progress in analytic number theory*[J]. Halberstam H.Hooley C.London Mathematical society, 1981, 1: 247-256.

[39] Mollin R A, Poorten A J, Williams H C. *Halfway to a Solution of* $x^2 - Dy^2 = -3$[J]. Journal de Theorie des Nombres Bordeaux, 1994, 6: 421-457.

[40] Mollin R A. *A Simple Criterion for Solvability of both* $X^2 - DY^2 = c$ *and* $X^2 - DY^2 = -c$[J]. New York J. Math. 2001, 7: 87-97.

[41] Mollin R A, Cheng K, Goddard B. *The Diophantine Equation* $AX^2 - BY^2 = C$ *Solved via Continued Fractions*[J]. Acta Math. Univ. Comenianae, 2002, 71: 121-138.

[42] Murthy A. *Some notions on least common multiples*[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.

[43] Pan C D, Pan C B. *The elementary proof the print theory*[M]. Shanghai: Shanghai Scientific Technical Publishers, 1988.

[44] Pomerance C. *On the composition of the arithmetic functions* ϕ *and* σ[J]. Colloq.Math.1989, **58**: 11-15.

[45] Sandor J. *On certain limits for arithmetical functions*[J]. Octogon Math Mag, 2007, **15(1)**: 280-282.

[46] Smaradache F. *Only problems, not solutions*[M]. Xiquan Publishing House, Chicago, 1993: 41-42.

[47] Stevenhagen P A. *Density Conjecture for the Negative Pell Equation, Computational Algebra and Number Theory*[J]. Math. Appl. 1992, 325: 187-200.

[48] Tekcan A. *Pell Equation* $x^2 - Dy^2 = 2II$[J]. Irish Math.Soc.Bulletin, 2004, **54(1)**: 73-89.

[49] Wu Q B. *A conjecture involving the Smarandache LCM function*[J]. Scientia Magna, 2007, **3(1)**: 26-28.

[50] 吴莉, 杨仕椿. 无平方因子数的上界估计[J]. 西南民族大学: 自然科学版, 2009, **35(1)**: 82-83.

[51] 吴莉, 杨仕椿. 一类约数和函数的上界估计[J]. 西南民族大学: 自然科学版, 2010, **36(5)**: 718-720.

[52] 吴莉, 杨仕椿. 一个关于*Smarandache LCM*函数的猜想[J]. 西南民族大学: 自然科学版, 2011, **37(5)**: 696-698.

[53] 吴莉, 王学平, 杨仕椿. *Pell*方程$x^2 - Dy^2 = \pm 2$的解的递推性质[J]. 四川师范大学: 自然科学版, 2013, **36(2)**: 1-3

[54] 吴莉, 杨仕椿. 约数和函数$\delta(n)$有关的一些不等式的解[J]. 理论数学, 2013, 3: 107-111.

[55] Xu Z F. *On the mean value of the Smarandache power function*[J]. 数学学报, 2006, **49(1)**: 77-80.

[56] Zhang W P. *Elementary number theory*[M]. Xi'an:Shanxi Normal University Publishers,2007

[57] 朱伟义, 一个包含 *F.Smarandache LCM* 的函数的猜想[J]. 数学学报, 2008, **51(5)**: 956-958.

致 谢

2009年10月,我顺利通过在职研究生考试,有幸师从王学平教授门下.王老师学识渊博,治学严谨. 在论文写作过程中, 王老师进行了悉心的指导和仔细的修改, 并对其中的许多错误和疏漏进行了更正, 在此向王老师表示衷心的感谢.

值此毕业论文完成之际, 感谢王学平教授在三年来一直给予作者在学习上、研究上的帮助和指导, 使我增长了知识的同时, 也积累了不少研究的经验, 培养了我在学习和科研上的独立自主能力和创新能力. 王老师严谨的治学精神, 渊博的知识, 深厚的数学功底和他对学术研究的认真精神, 都使我对从事数学研究工作有了更加深刻的认识, 使作者受益匪浅, 对自己今后的学习、教学和科研工作都有极大的帮助, 在此作者向王老师表示诚挚的谢意!

感谢四川师范大学师资培训中心,数学学院的老师与工作人员,他们的辛勤工作为我们提供了良好的学习研究环境.

感谢王学平教授的热情关怀、无私教诲和悉心帮助! 衷心感谢数学学院的领导和各位任课老师给予作者大力支持! 衷心感谢各位师弟、师妹和同学对作者的大力帮助和关心!

在校期间的科研成果

[1]吴莉, 徐肖震. 基于区间直觉判断矩阵的群决策及逆判方法[J]. 重庆文理学院学报, 2012, **31(5)**: 28-32.

[2] 吴莉. 模糊关系中算子$\sigma, \alpha, \varepsilon$之间的关系[J]. 湖南文理学院学报: 自然科学版, 2012, **24(2)**: 1-3.

[3]吴莉, 王学平, 杨仕椿. *Pell*方程$x^2 - Dy^2 = \pm 2$的解的递推性质[J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2013, **36(2)**: 190-192.

[4]吴莉, 杨仕椿. 与约数和函数$\delta(n)$有关的一些不等式的解[J]. Pure Mathematics , 2013, 3: 107-111.